PART2 等式の証明

要点 ① 等式の証明

等式 $A=B$ を証明するということは，この等式が「　　　」であることを示すことである。
等式 $A=B$ を証明するとき，以下のいずれかの方法が代表的な解法である。

等式 $A=B$ の証明

1　A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。

2　A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。

3　$A-B=0$ であることを導く。

例　等式 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ を証明する。

1 の方法を用いると

$$(\text{右辺})=a^2-2ab+b^2+4ab=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(\text{左辺})$$

よって　$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

要点 ② 条件つきの等式の証明

ここでは，ある条件のもとで常に成り立つ等式を証明する。

例　$a+b=2$ のとき，等式 $a^2+2b=b^2+2a$ を証明する。

$a+b=2$ のとき　$b=$

このとき

$$(\text{左辺})=a^2+2(-a+2)=a^2-2a+4$$

$$(\text{右辺})=(-a+2)^2+2a=a^2-4a+4+2a=a^2-2a+4$$

よって　$a^2+2b=b^2+2a$

要点 ③ 比例式

$a:b=c:d$ のとき，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ である。

このように，「比の値」が等しいことを示す式を「　　　　」という。

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

のように比例式を「　　　」とおくことにより，$a=$　　，$c=$　　のように，複数の文字を共通の文字 k で表すことができる。

2 次の等式を証明せよ。

(1) $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

(2) $a+b+c=0$ のとき，$a^2+b^2=c^2-2ab$

(3) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

Point Pickup

等式 $A=B$ の証明

1 A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。

2 A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。

3 $A-B=0$ であることを導く。（$A-B$ を計算して 0 になる。）

条件つきの等式の証明

条件式を用いて，文字を減らして進める。

条件式が比例式の場合は，（比例式）$=k$ とおくとよい。

第 2 講　PART2 確認問題

1　次の等式を証明せよ。

$$x^4-16=(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$$

[証明]

$$(\text{右辺})=x^4+2x^3+\boxed{\text{ア}}x^2+8x-\boxed{\text{イ}}x^3-4x^2$$
$$-\boxed{\text{ウ}}x-\boxed{\text{エオ}}$$
$$=x^4-\boxed{\text{カキ}}=(\text{左辺})$$

よって　$x^4-16=(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$

2　$a-b+2c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$b^2-2ac=4c^2+ab$$

[証明]

$a-b+2c=0$ より

$$a=b-\boxed{\text{ク}}c$$

このとき

$$(\text{左辺})=b^2-\boxed{\text{ケ}}(b-\boxed{\text{ク}}c)c$$
$$=b^2-\boxed{\text{コ}}bc+\boxed{\text{サ}}c^2$$
$$(\text{右辺})=4c^2+(b-\boxed{\text{シ}}c)b$$
$$=4c^2+b^2-\boxed{\text{シ}}bc$$
$$=b^2-\boxed{\text{シ}}bc+4c^2$$

よって　$b^2-2ac=4c^2+ab$

3 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a+2c}{b+2d}$$

ただし，$\boxed{\text{ス}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ は，下の①～⑥のうちから選べ。

[証明]

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと

$$a=\boxed{\text{ス}},\ c=\boxed{\text{セ}}$$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タ}}}{b-d}$$

$$=\frac{k(b-d)}{b-d}=\boxed{\text{チ}}$$

$$(\text{右辺})=\frac{\boxed{\text{ツ}}+2\boxed{\text{テ}}}{b+2d}$$

$$=\frac{\boxed{\text{ト}}(b+2d)}{b+2d}=k$$

よって　$\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a+2c}{b+2d}$

[選択肢]

① ak　② bk　③ ck

④ dk　⑤ k　⑥ $2k$

[MEMO]

PART2 等式の証明

2 次の等式を証明せよ。

(1) $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

(2) $a+b+c=0$ のとき，$a^2+b^2=c^2-2ab$

(3) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

[解答]

(1) $(\text{右辺})=x^4+x^3+x^2+x-x^3-x^2-x-1=x^4-1=(\text{左辺})$

よって　$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

(2) $a+b+c=0$ より $a=-b-c$

このとき

$$(\text{左辺})=(-b-c)^2+b^2=b^2+2bc+c^2+b^2=2b^2+2bc+c^2$$

$$(\text{右辺})=c^2-2(-b-c)b=c^2+2b^2+2bc=2b^2+2bc+c^2$$

よって　$a^2+b^2=c^2-2ab$

(3) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$(\text{右辺})=\frac{bk-dk}{b-d}=\frac{k(b-d)}{b-d}=k$$

よって　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

第 2 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イ：2，ウ：8，エオ：16，カキ：16

[解説]

(右辺) $= x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 2x^3 - 4x^2 - 8x - 16$

$= x^4 - 16 =$ (左辺) [A]

よって　$x^4 - 16 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$

[A]　等式 $A = B$ の証明
A を変形して B を導く，または
B を変形して A を導く。

2 **[正解]** ク：2，ケ：2，コ：2，サ：4，シ：2

[解説]

$a - b + 2c = 0$ より

$a = b - 2c$ [B]

このとき

(左辺) $= b^2 - 2(b - 2c)c$ [C]

$= b^2 - 2bc + 4c^2$

(右辺) $= 4c^2 + (b - 2c)b$

$= 4c^2 + b^2 - 2bc$

$= b^2 - 2bc + 4c^2$

よって　$b^2 - 2ac = 4c^2 + ab$

[B]　条件つきの等式の証明では，
条件式を用いて文字を減らして進める。

[C]　等式 $A = B$ の証明
A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。

3 [正解] ス：②，セ：④，ソ：②，タ：④，チ：⑤，ツ：②，テ：④，ト：⑤

[解説]

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと [D]

$$a=\boldsymbol{bk},\quad c=\boldsymbol{dk}$$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{\boldsymbol{bk}-\boldsymbol{dk}}{b-d}$$ [E]

$$=\frac{k(b-d)}{b-d}=\boldsymbol{k}$$

$$(\text{右辺})=\frac{\boldsymbol{bk}+2\boldsymbol{dk}}{b+2d}$$

$$=\frac{\boldsymbol{k}(b+2d)}{b+2d}=k$$

よって　$\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a+2c}{b+2d}$

[D]　条件式が比例式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ などと与えられている場合は，
　　（比例式）$=k$
とおくとよい。

[E]　等式 $A=B$ の証明
A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。